Bitte klebe/hefte folgendes Blatt in dein RH. Vergleiche deine Ergebnisse mit den Lösungen im Anhang.

4. Exponentialgleichungen - Logarithmus („Hochzahlpflücker“)

Der Logarithmus zur Basis 2 von 8, man schreibt dafür $\log_2(8)$, ist diejenige Zahl, mit der man 2 potenzieren muss, damit man 8 erhält: $\log_2(8) = 3$, da $2^3 = 8$.
Weitere Beispiele: $\log_5(25) = 2$, da $5^2 = 25$; $\log_{0,5}(0{,}25) = 2$, da $0{,}5^2 = 0{,}25$.

1 Fülle die Lücken aus.

Zu a): Mit welcher Zahl muss 3 potenziert werden, um 27 zu erhalten?

a) $\log_3(27) = \underline{3}$ b) $\log_4(64) = \underline{3}$ c) $\log_{0,1}(\underline{0{,}01}) = 2$ d) $\log_{\underline{11}}(11) = 1$

Gleichungen, die sich auf die Form $\mathbf{a^x = b}$ bringen lassen (wobei a und b positive Zahlen sind), heißen **Exponentialgleichungen**.
Beispiel: $4 \cdot 2^x + 5 = 37$ ist eine Exponentialgleichung. Um ihre Lösung zu bestimmen, muss man die Gleichung äquivalent umformen: $4 \cdot 2^x + 5 = 37 \Rightarrow 4 \cdot 2^x = 32 \Rightarrow 2^x = 8$. Also ist $x \log_2(8) = 3$ die Lösung.
Beachte, dass nicht jede Exponentialgleichung eine ganzzahlige Lösung hat.

2 Die Lösungen folgender Exponentialgleichungen sind ganzzahlig. Schreibe die Lösungen mithilfe des Logarithmus und gib einen Zahlenwert dafür an. Beispiel: $2^x = 8 \Rightarrow x = \log_2(8) = 3$

a) $2^x = 16 \Rightarrow x = \log_2(16) = 3$ b) $4^x = 16 \Rightarrow x = \log_4(16) = 2$ c) $3^x = 27 \Rightarrow x = \log_3(27) = 3$

d) $9^x = 81 \Rightarrow x = \log_9(81) = 2$ e) $3^x = 81 \Rightarrow x = \log_3(81) = 4$ f) $10^x = 10\,000 \Rightarrow x = \log_{10}(10000) = 4$

g) $7^x = 343 \Rightarrow x = \log_7(343) = 3$ h) $5^x = 625 \Rightarrow x = \log_5(625) = 4$ i) $6^x = 1 \Rightarrow x = \log_6(1) = 0$

j) $16^x = 256 \Rightarrow x = \log_{16}(256) = 2$ k) $4^x = 256 \Rightarrow x = \log_4(256) = 4$ l) $2^x = 256 \Rightarrow x = \log_2(256) = 8$

3 Bestimme ebenso die Lösungen der folgenden Exponentialgleichungen.

a) $2^x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \log_2\left(\frac{1}{4}\right) = \underline{-2}$, da $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$

b) $2^x = \frac{1}{16} \Rightarrow x = \log_2\left(\frac{1}{16}\right) = \underline{-4}$, da $\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} = 2^{-4}$

c) $2^x = \frac{1}{1024} \Rightarrow x = \log_2\left(\frac{1}{1024}\right) = \underline{-10}$, da $\frac{1}{1024} = \frac{1}{2^{10}} = 2^{-10}$

d) $3^x = \frac{1}{81} \Rightarrow x = \log_2\left(\frac{1}{81}\right) = \underline{-4}$, da $\frac{1}{\square} = \frac{1}{3^{\square}} = 3^{\square}$

2. e) $5^x = \frac{1}{25} \Rightarrow x = \log_5\left(\frac{1}{25}\right) = \underline{-2}$, da $\frac{1}{\square} = \frac{1}{\square^{\square}} = \square^{-2}$

? f) $10^x = \frac{1}{1000} \Rightarrow x = \log_{10}\left(\frac{1}{1000}\right) = \underline{-3}$, da $\frac{1}{\square} = \frac{1}{\square^{\square}} = \square^{-3}$

Beispiel:
Die Lösung von $3^x = \frac{1}{9}$ ist $x = \log_3\left(\frac{1}{9}\right) = -2$,
da $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$.

? **4** Bringe auf die Form $a^x = b$ und gib die Lösung mithilfe des passenden Logarithmus an.

a) $3^x + 4 = 85 \Rightarrow 3^x =$ _____ $\Rightarrow x =$ _____ b) $4^x - 3 = 61 \Rightarrow 4^x =$ _____ $\Rightarrow x =$ _____

c) $10^x + 125 = 10\,125 \Rightarrow 10^x =$ _____ $\Rightarrow x =$ _____ d) $11^x + 121 = 121 \Leftrightarrow 11^x =$ _____ $\Rightarrow x =$ _____

e) $3 \cdot 2^x = 24 \Rightarrow 2^x =$ _____ $\Rightarrow x =$ _____ f) $4 \cdot 7^x = 196 \Rightarrow 7^x =$ _____ $\Rightarrow x =$ _____

g) $-2 \cdot 3^x = -162 \Rightarrow 3^x =$ _____ $\Rightarrow x =$ _____ h) $\frac{1}{2} \cdot 5^x = 312{,}5 \Rightarrow 5^x =$ _____ $\Rightarrow x =$ _____

i) $\frac{2}{3} \cdot 4^x = \frac{512}{3} \Rightarrow 4^x =$ _____ $\Rightarrow x =$ _____ j) $4 \cdot 8^x = 256 \Rightarrow 8^x =$ _____ $\Rightarrow x =$ _____

Autor: Sven Rempe

Einstieg: Logarithmus als „Hochzahlpflücker“, S 49

1 a) $\log_3(27) = 3$ b) $\log_4(64) = 3$ c) $\log_{0,1}(0{,}01) = 2$ d) $\log_{11}(11) = 1$

2 a) $x = \log_2(16) = 4$ b) $x = \log_4(16) = 2$ c) $x = \log_3(27) = 3$ d) $x = \log_9(81) = 2$
e) $x = \log_3(81) = 4$ f) $x = \log_{10}(10\,000) = 4$ g) $x = \log_7(343) = 3$ h) $x = \log_5(625) = 4$
i) $x = \log_6(1) = 0$ j) $x = \log_{16}(256) = 2$ k) $x = \log_4(256) = 4$ l) $x = \log_2(256) = 8$

3 a) $2^x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \log_2\left(\frac{1}{4}\right) = -2$, da $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$

b) $2^x = \frac{1}{16} \Rightarrow x = \log_2\left(\frac{1}{16}\right) = -4$, da $\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} = 2^{-4}$

c) $2^x = \frac{1}{1024} \Rightarrow x = \log_2\left(\frac{1}{1024}\right) = -10$, da $\frac{1}{1024} = \frac{1}{2^{10}} = 2^{-10}$

d) $3^x = \frac{1}{81} \Rightarrow x = \log_3\left(\frac{1}{81}\right) = -4$, da $\frac{1}{81} = \frac{1}{3^4} = 3^{-4}$

e) $5^x = \frac{1}{25} \Rightarrow x = \log_5\left(\frac{1}{25}\right) = -2$, da $\frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} = 5^{-2}$

f) $10^x = \frac{1}{1000} \Rightarrow x = \log_{10}\left(\frac{1}{1000}\right) = -3$, da $\frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$

4 a) $3^x + 4 = 85 \Rightarrow 3^x = 81 \Rightarrow x = 4$ b) $4^x - 3 = 61 \Rightarrow 4^x = 64 \Rightarrow x = 3$
c) $10^x + 125 = 10\,125 \Rightarrow 10^x = 10\,000 \Rightarrow x = 4$ d) $11^x + 121 = 121 \Rightarrow 11^x = 0 \Rightarrow x$ existiert nicht
e) $3 \cdot 2^x = 24 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$ f) $4 \cdot 7^x = 196 \Rightarrow 7^x = 49 \Rightarrow x = 2$
g) $-2 \cdot 3^x = -162 \Rightarrow 3^x = 81 \Rightarrow x = 4$ h) $\frac{1}{2} \cdot 5^x = 312{,}5 \Rightarrow 5^x = 625 \Rightarrow x = 4$
i) $\frac{2}{3} \cdot 4^x = \frac{512}{3} \Rightarrow 4^x = 256 \Rightarrow x = 4$ j) $4 \cdot 8^x = 256 \Rightarrow 8^x = 64 \Rightarrow x = 2$

Autor: Sven Rempe