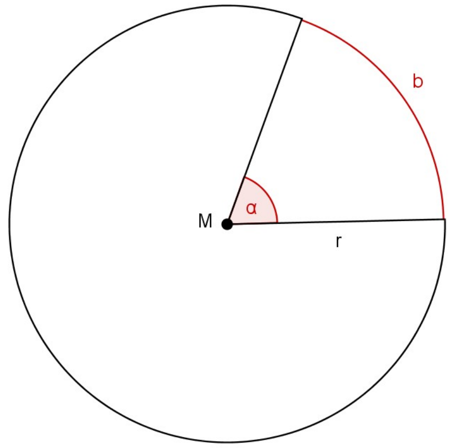
1 Kreis und Kugel

Zum Kreis vgl. Klasse 8, 6.1.

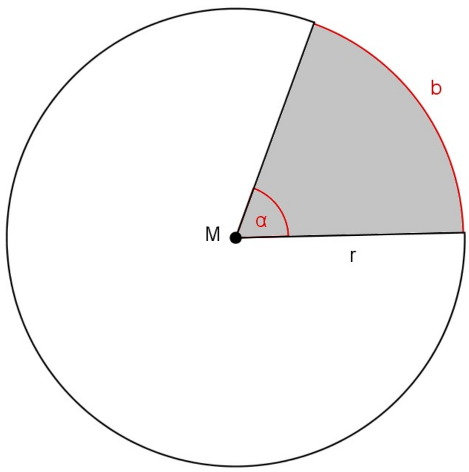
1. **Bogenmaß**:
   Durch den Mittelpunktswinkel α wird auf einer Kreislinie mit Radius r ein Kreissektor mit **Bogenlänge b** festgelegt.
   Es gilt:
   $$b=\frac{r\pi\alpha}{180°}$$
   Am Einheitskreis besteht damit eine direkte Beziehung zwischen Bogenlänge b und dem Mittelpunktswinkel α. Dieses Winkelmaß nennt man **Bogenmaß**. Die Größe des Winkels α in Bogenmaß beträgt: $\frac{\pi\alpha}{180°}$



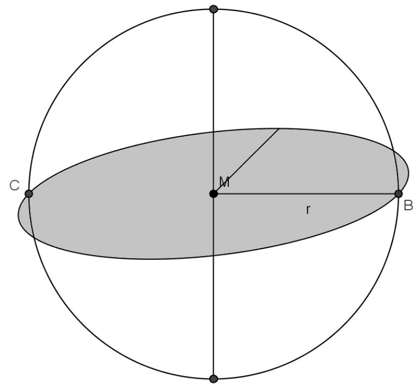
Winkel im Gradmaß	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Winkel im Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

2. **Kreissektor:**

   Der Flächeninhalt eines Kreissektors mit Mittelpunktswinkel α des Kreises mit Radius r beträgt:
   $$A = \frac{\alpha}{360°}\cdot\pi r^2 = \frac{1}{2}\cdot rb.$$



3. Kugel:



Für den Oberflächeninhalt einer Kugel mit Radius *r* gilt:

$$A_{Kugel}=4\pi\cdot r^2$$

Für ihr Volumen gilt:

$$V_{Kugel}=\frac{4}{3}\pi\cdot r^3$$

Beispiel:
Das Volumen einer Kugel beträgt $500\,\text{cm}^3$.
Bestimme ihren Radius und ihren Oberflächeninhalt!

$$\begin{aligned} 500\,\text{cm}^3 &= \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Big| \cdot \frac{3}{4\pi} \\ 119\,\text{cm}^3 &\approx r^3 \\ 4{,}9\,\text{cm} &\approx r \end{aligned}$$

Damit gilt für ihren Oberflächeninhalt:

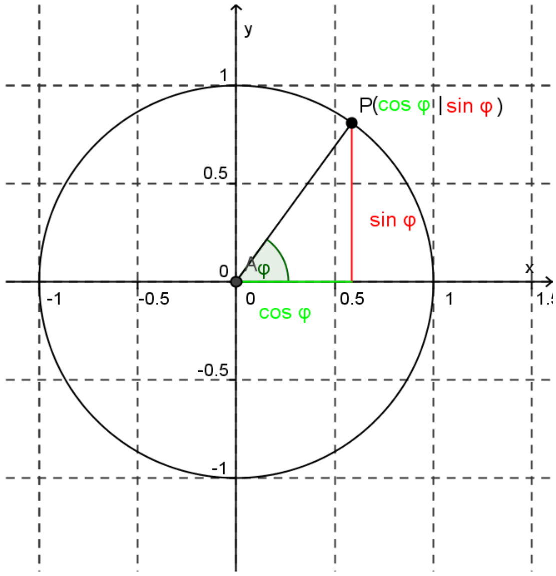
$$A_{Kugel} = 4\pi\cdot(4{,}9\,\text{cm})^2 \approx 301{,}7\,\text{cm}^2$$

2 Trigonometrie

(vgl. für Sinus, Kosinus, Tangens Klasse 9, 4.4)

1. **Sinus und Kosinus am Einheitskreis**:

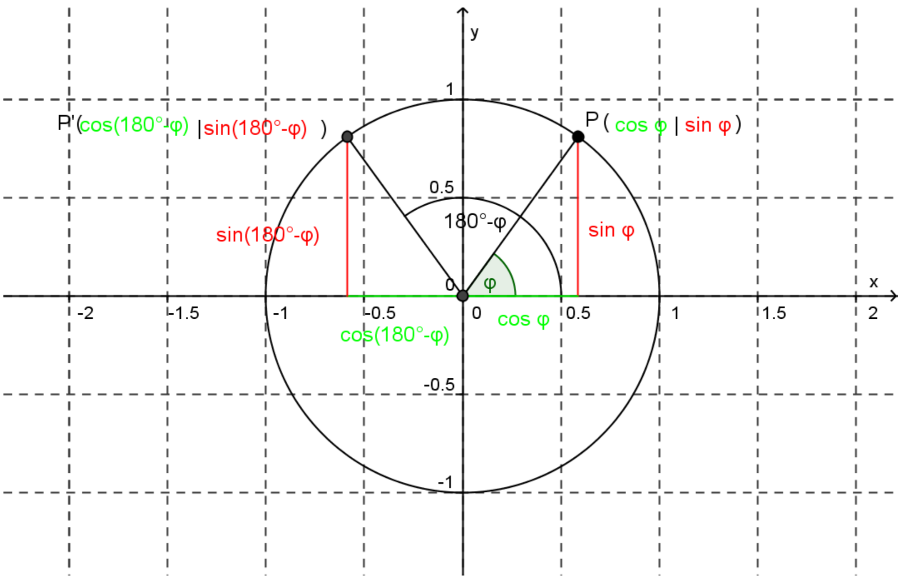
   Die Funktionswerte *cos φ* und *sin φ* können am Einheitskreis für beliebige Winkel *φ* als x-Koordinate und y-Koordinate des Punktes P definiert werden:



   Daraus ergeben sich weitere Eigenschaften, wie z.B.:

   a)
$$\sin(\varphi) = \sin(180°-\varphi)$$
$$\cos(\varphi) = -\cos(180°-\varphi)$$

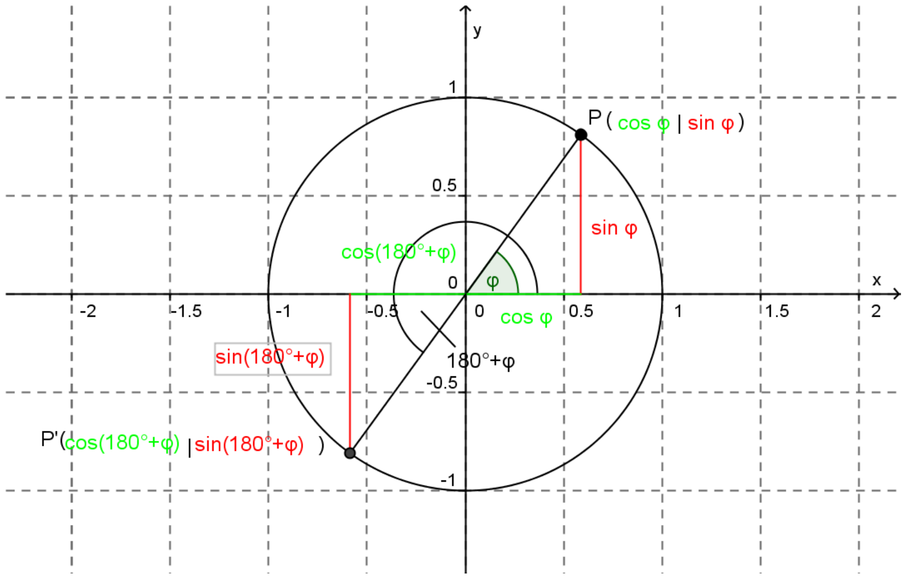
   (P an der y-Achse spiegeln)



b)

$$\begin{array}{lclcl}\sin(\varphi) & = & -\sin(180°+\varphi) & = & -\sin(\varphi-180°)\\ \cos(\varphi) & = & -\cos(180°+\varphi) & = & -\cos(\varphi-180°)\end{array}$$

(P um eine halbe Kreisdrehung bewegen)



c)

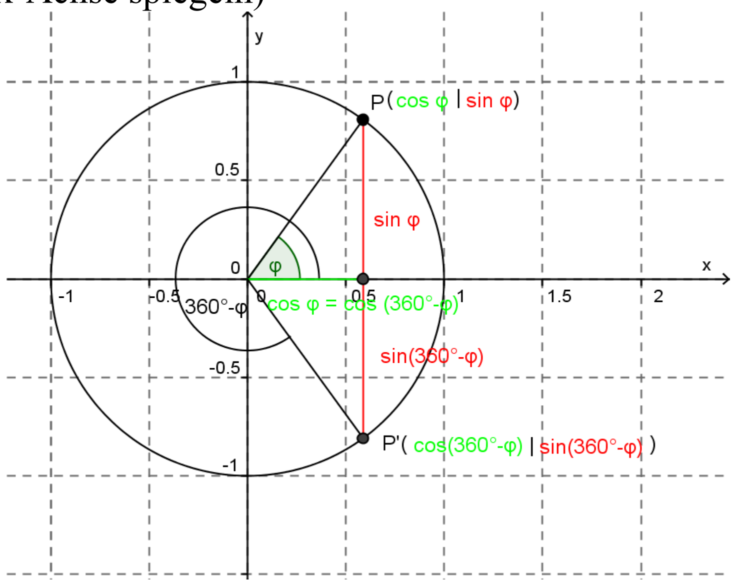
$$\begin{array}{lclcl}\sin(\varphi) & = & \sin(360°+\varphi) & = & \sin(\varphi-360°)\\ \cos(\varphi) & = & \cos(360°+\varphi) & = & \cos(\varphi-360°)\end{array}$$

(P um eine volle Kreisdrehung bewegen führt zur Ausgangsposition)

d)

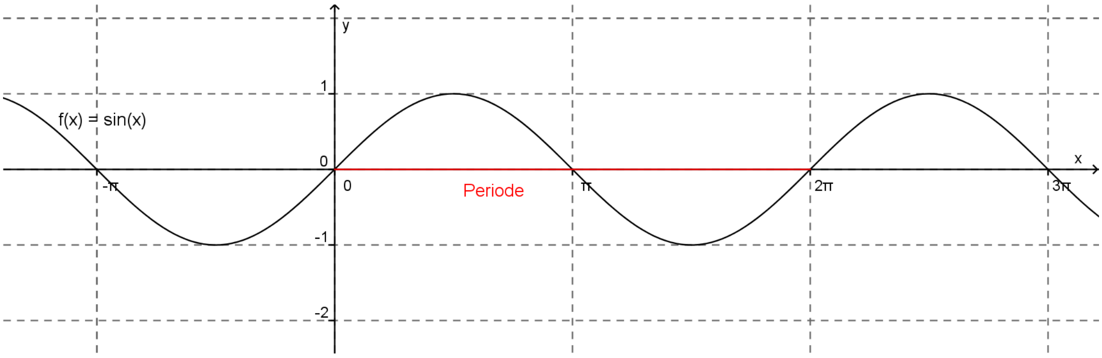
$$\begin{array}{lcl}\sin(\varphi) & = & -\sin(360°-\varphi)\\ \cos(\varphi) & = & \cos(360°-\varphi)\end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{lcl}\sin(\varphi) & = & -\sin(-\varphi)\\ \cos(\varphi) & = & \cos(-\varphi)\end{array}$$

(P an der x-Achse spiegeln)

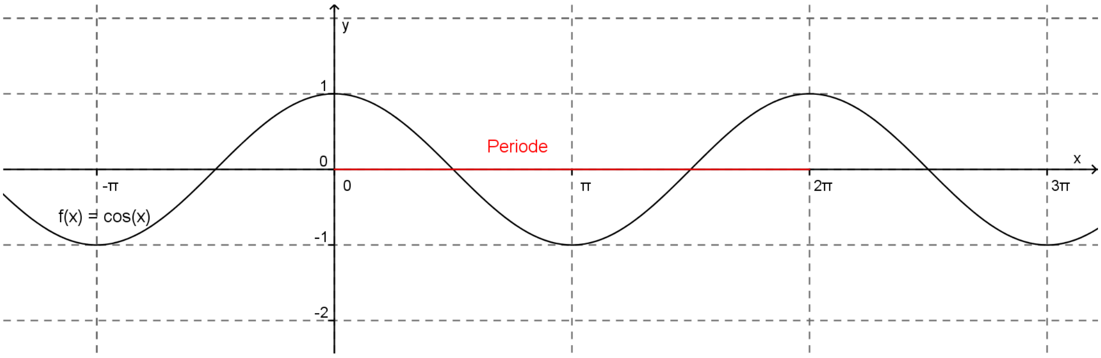


2. **Sinusfunktion und Kosinusfunktion**:

Die Funktion $f:\ f(x) = \sin x,\ x \in \mathbb{R}$ heißt **Sinusfunktion**



und die Funktion $g:\ g(x) = \cos x,\ x \in \mathbb{R}$ **Kosinusfunktion**.



Sie haben folgende Eigenschaften:

● Beide Funktionen haben den Wertebereich $W = [-1\,;1]$.

● Beide Funktionen sind **periodische Funktionen**, d.h. ihre Funktionswerte wiederholen sich in einem bestimmten Abstand (hier: 2π).

$\sin(x) = \sin(x + k \cdot 2\pi)$ für $k \in \mathbb{Z}$

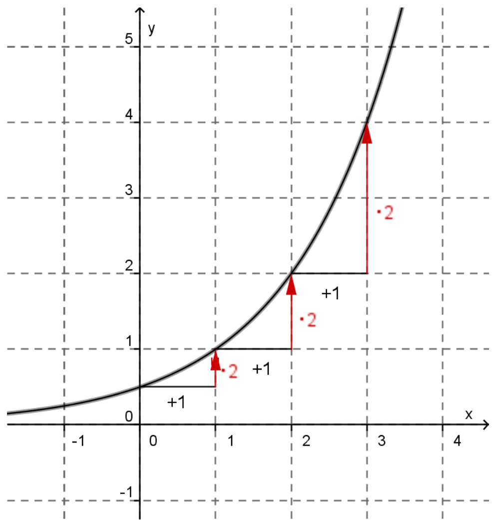
$\cos(x) = \cos(x + k \cdot 2\pi)$ für $k \in \mathbb{Z}$

● Die Sinusfunktion ist punktsymmetrisch zum Ursprungspunkt des Koordinatensystems, die Kosinusfunktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

 © 2010 Gymnasium Neubiberg

3 Exponentielles Wachstum und Logarithmen

1. Exponentielles Wachstum - lineares Wachstum (vgl. Klasse 8, 2.4)



Exponentielles Wachstum liegt dann vor, wenn der Zuwachs einer Größe pro Zeiteinheit **proportional zum aktuellen Bestand der Größe** ist.

$y = b \cdot a^x$

Hier im Beispiel:

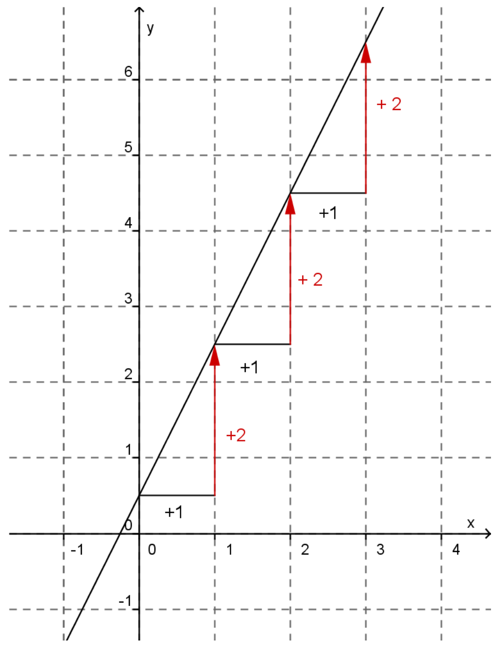
$y = 0{,}5 \cdot 2^x$

Die Größe y wächst hier also jeweils um **Faktor 2**, wenn sich x um 1 erhöht.

+1 +1 +1

x	0	1	2	3
y	0,5	1	2	4

·2 ·2 ·2



Lineares Wachstum liegt dann vor, wenn der Zuwachs einer Größe pro Zeiteinheit **konstant** ist.

$y = b + a \cdot x$

Hier im Beispiel:

$y = 0{,}5 + 2 \cdot x$

Die Größe y wächst also jeweils um den **Summanden 2,** wenn sich x um 1 erhöht.

+1 +1 +1

x	0	1	2	3
y	0,5	1	2	4

+ 2 + 2 + 2

Der Parameter b gibt jeweils den Bestand zum Anfangszeitpunkt $x = 0$ an. *a* hängt eng mit dem Wachstumsfaktor/Abnahmefaktor (vgl. Klasse 7, 4.2) zusammen. Es gilt:

a) Bei einer p% Wachstumsrate spricht man von einer **exponentiellen Zunahme**

$a = 1 + \frac{p}{100}$ Es gilt also: $a > 1$

b) Bei einer p% Abnahmerate spricht man von einer **exponentiellen Abnahme**

$a = 1 - \frac{p}{100}$ Es gilt also: $0 < a < 1$

2. Beispiele:

a) Eine Bakterienkultur verdoppelt sich je2,5 h. Zu Beginn gibt es 7000 Bakterien.
Wie viele Bakterien sind es nach 3 h?

Die Gleichung lautet: $y = b \cdot a^x$
Zu Beginn $(x=0)$ sind es 7000. Deshalb gilt: $b=7000.$
Nach 2,5 h hat sich der Bestand verdoppelt, es sind also 14000. Damit gilt:

$$\begin{aligned} 14000 &= 7000 \cdot a^{2,5} \quad |:7000 \\ 2 &= a^{\frac{5}{2}} \\ 2^{\frac{2}{5}} &= a \\ 1{,}32 &\approx a \end{aligned}$$

Die Gleichung lautet also: $y = 7000 \cdot 1{,}32^x$.
Damit gilt: $7000 \cdot 1{,}32^3 \approx 7000 \cdot 2{,}3 = 16100.$

Nach 3 h gibt es also rund 16100 Bakterien in der Kultur.

b) Nach 4 Jahren besitzt ein Waldbestand 243101,25 Festmeter Holz. Bei gleich bleibenden Wachstumsraten sind es nach 7 Jahren 281420,08 Festmeter.
Bestimme die Gleichung für das exponentielle Wachstum und den Holzbestand nach 10 Jahren!

Aus den beiden angegebenen Daten lassen sich zwei Punkte auf dem Funktionsgraph herauslesen: (4| 243101,25) und (7 | 281420,08) .

$I: \; 243101{,}25 = b \cdot a^4$ und $II: \; 281420{,}08 = b \cdot a^7$

(1. Lösungsweg zur Bestimmung von a:) Beide Gleichungen werden nach b aufgelöst:

$I':\ \dfrac{243101{,}25}{a^4} = b$ und $II':\ \dfrac{281420{,}08}{a^7} = b$

Die Gleichung werden gleichgesetzt:

$$\begin{aligned}
\frac{243101{,}25}{a^4} &= \frac{281420{,}08}{a^7} && \mid \cdot a^7 \\
243101{,}25\cdot\frac{a^7}{a^4} &= 281420{,}08 && \mid :243101{,}25 \\
a^3 &= \frac{281420{,}08}{243101{,}25} \\
a &= \sqrt[3]{\frac{281420{,}08}{243101{,}25}} \\
a &\approx 1{,}05
\end{aligned}$$

(2. Lösungsweg zur Bestimmung von a:) Die eine Gleichung wird durch die andere dividiert: Hier II' / I'

$$\begin{aligned}
\frac{281420{,}08}{243101{,}25} &= \frac{b\cdot a^7}{b\cdot a^4} \\
\frac{281420{,}08}{243101{,}25} &= a^3 \\
\sqrt[3]{\frac{281420{,}08}{243101{,}25}} &= a \\
1{,}05 &\approx a
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung von b muss eines der beiden Wertepaare in die Gleichung $y = b\cdot 1{,}05^x$ eingesetzt werden.

$$\begin{aligned}
243101{,}25 &= b\cdot 1{,}05^4 && \mid :1{,}05^4 \\
200000 &\approx b
\end{aligned}$$

Damit lautet die Gleichung: $y = 200000\cdot 1{,}05^x$.
Nach 10 Jahren gilt damit: $y = 200000\cdot 1{,}05^{10} \approx 325779$
Nach 10 Jahren besitzt man also ungefähr 325779 Festmeter.

c) Beim radioaktiven Zerfall des Caesiumisotops Cs 137 wandeln sich pro Jahr 2,1% des Isotops in Barium um. 2010 besitzt man 2,0 kg des Stoffes. Wie viel besitzt man im Jahr 2020?

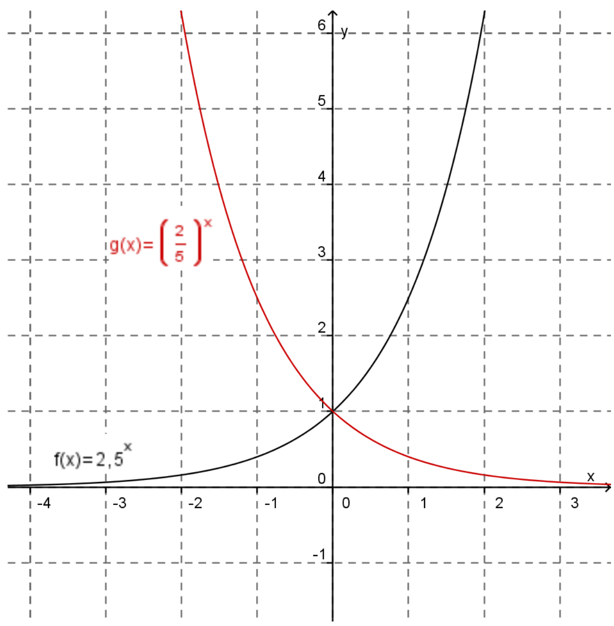
Der jährliche Zerfall beträgt 2,1%, also $a = 1 - \frac{2,1}{100} = 0,979$.

Die Gleichung lautet damit: $y = 2,0\,\text{kg} \cdot 0,979^{(x-2010)}$.

Für das Jahr 2020 gilt:
$y = 2,0\,\text{kg} \cdot 0,979^{(2020-2010)} \approx 2\,\text{kg} \cdot 0,8088 = 1,6176\,\text{kg}$.
Im Jahr 2020 sind also noch ungefähr 1,6 kg des Stoffs vorhanden.

3. Eigenschaften der Exponentialfunktion

Jede Funktion f mit $f(x) = a^x;\ D_f = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ heißt **Exponentialfunktion**. Sie besitzt die folgenden Eigenschaften:



- Der Graph jeder Exponentialfunktion schneidet die y-Achse im Punkt P(0|1).
- Für a>1 „wächst“ die Funktion mit zunehmenden x-Werten.
  Für 0<a<1 „fällt“ sie.
- Die Wertemenge jeder Exponentialfunktion ist $W = \mathbb{R}^+$.
- Die x-Achse ist horizontale **Asymptote** des Funktionsgraphen.
- Die Graphen der Funktionen $f_a\colon f_a(x) = a^x$ und $g_a\colon g_a(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ mit $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ sind symmetrisch zueinander bezüglich der y-Achse.

4. Der Logarithmus

(vgl. für Potenzen: Klasse 8,1)

a) **Definition:**

Die Lösung der Gleichung $b^x = p$ mit $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und $p \in \mathbb{R}^+$ über $G = \mathbb{R}$ ist $x = \log_b(p)$ (gelesen: Logarithmus von p zur Basis b)

Beispiele:

1) $4^x = 64$ also $x = \log_4(64) = 3$

2) $8^x = 2$ also $x = \log_8(2) = \frac{1}{3}$

3) $5^x = \frac{1}{125}$ also $x = \log_5(\frac{1}{125}) = -3$

Das Logarithmieren zur Basis *b* ist eine Umkehrung des Potenzierens mit der Basis *b*. Es gilt deshalb mit $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$; $x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}^+$:

$\log_b(b^x) = x$ oder $b^{\log_b(y)} = y$

Spezialfälle:

$\log_b(1) = 0$ und $\log_b(b) = 1$

Der Logarithmus zur Basis 10 wird kurz geschrieben: $\log_{10}(p) = \log(p)$

b) **Rechengesetze des Logarithmus:**

Mit $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$; $p, q \in \mathbb{R}^+$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\log_b(p \cdot q) = \log_b(p) + \log_b(q)$
- $\log_b(\frac{p}{q}) = \log_b(p) - \log_b(q)$
- $\log_b(p^r) = r \cdot \log_b(p)$
- $\log_a(p) = \frac{\log_b(p)}{\log_b(a)}$ (Wechsel der Basis)

Beispiele:

1) $\log_a(ba^5) = \log_a(b) + \log_a(a^5) = \log_a(b) + 5\cdot\log_a(a) = \log_a(b)+5$

2)
$$\begin{aligned}
&\log_{100}(a^4) - 3\log(a^2)\\
&= \frac{\log(a^4)}{\log(100)} - \log((a^2)^3)\\
&= \frac{1}{2}\log(a^4) - \log(a^6)\\
&= \log((a^4)^{\frac{1}{2}}) - \log(a^6)\\
&= \log(\frac{a^2}{a^6})\\
&= \log(a^{-4})
\end{aligned}$$

5. Exponentialgleichungen

Gleichungen, bei denen die Variable (nur) im Exponenten auftritt, heißen **Exponentialgleichungen**.

Beispiel:
$3^{x+1} = 81$ mit $G=\mathbb{R}$

Mit Hilfe des Logarithmierens kann die Lösungsmenge bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
3^{x+1} &= 81 && \mid \text{Logarithmieren}\\
\log_3(3^{x+1}) &= \log_3(81)\\
(x+1)\log_3(3) &= 4\\
x+1 &= 4 && \mid -1\\
x &= 3
\end{aligned}$$

also $L=\{3\}$

Hinweis: Verwendet man zum Logarithmieren eine Basis $b>1$, so bleibt auch bei Ungleichungen die Größer-/Kleinerrelation erhalten. Meist wählt man $b=10$.

4 Ganzrationale Funktionen

(vgl. für lineare Funktionen: Klasse 8, 2.4; quadratische Funktionen: Klasse 9, 2.2)

1. Definition

Jede Funktion f der Form $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$ mit $n \in \mathbb{N}_0$, $a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$ heißt **ganzrationale Funktion n-ten Grads** oder **Polynomfunktion n-ten Grads**. Ihr Funktionsterm wird auch Polynom genannt. Die Zahlen $a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0$ heißen **Koeffizienten**. Die Funktion f: $f(x) = 0$ ist ebenfalls eine ganzrationale Funktion 0-ten Grads.

Beispiele:

a) $f: f(x) = \frac{2}{3}x - 4$ Jede lineare Funktion ist auch eine ganzrationale Funktion.

b) $g: g(x) = \sqrt{5}x^2 - 2x + 8$ Jede quadratische Funktion ist auch eine ganzrationale Funktion.

c) $h: h(x) = 3x^3 + 2{,}5x^2 - 4$ Eine Polynomfunktion 3-ten Grads.

2. Bestimmung der Nullstellen

(vgl. für quadratische Funktionen Klasse 9,3)

Zur Nullstellenbestimmung muss die Gleichung $f(x) = 0$ gelöst werden. Eine ganzrationale Funktion n-ten Grads hat höchstens n Nullstellen. Ist x_1 eine Nullstelle von f, so lässt sich der Funktionsterm faktorisieren: $f(x) = (x - x_1) \cdot g(x)$, wobei g eine ganzrationale Funktion (n-1)-ten Grads ist. Der Term von g kann z.B. durch Polynomdivision bestimmt werden (vgl. 2.3).

Eine Nullstelle kann einfach oder mehrfach sein. Hat man f so weit wie möglich faktorisiert, so kann man die Nullstellen und ihre Vielfachheit direkt ablesen:

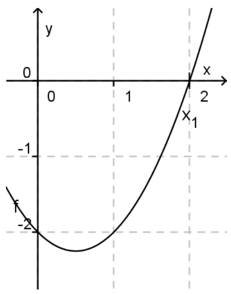
Beispiele:

a) $f(x) = (x-4)(x+2)$ also $f(x) = (x-4)(x-(-2))$
f besitzt zwei einfache Nullstellen: $x = 4$; $x = -2$

b) $g(x) = 12(x-5)^3 x$ also $g(x) = 12(x-5)^3(x-0)$

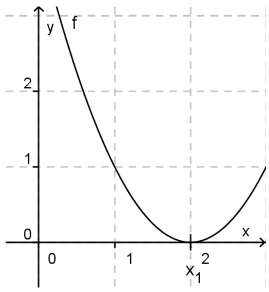
g besitzt eine dreifache Nullstelle $x = 5$ und eine einfache Nullstelle $x = 0$.

Die Funktion f hat eine k-fache Nullstelle $(k \in \mathbb{N})$ an der Stelle x_1. In der Nähe der Nullstelle wird das Verhalten der Funktion durch die Zahl k der Nullstelle bestimmt $(\text{hier: } x_1 = 2)$:



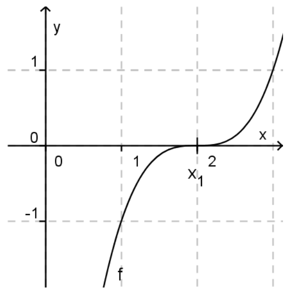
k=1

f(x) wechselt das Vorzeichen an der Stelle $x = x_1$.



k=2

f(x) wechselt das Vorzeichen an der Stelle $x = x_1$ <u>nicht</u>.



k=3

f(x) wechselt das Vorzeichen an der Stelle $x = x_1$.

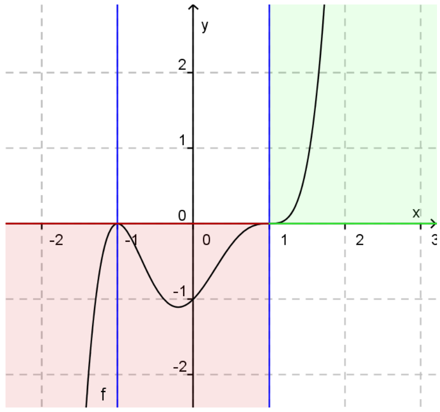
allgemein gilt:
k gerade: das Vorzeichen von f(x) **wechselt nicht**.
k ungerade: das Vorzeichen von f(x) **wechselt**.

Zwischen benachbarten Nullstellen wechselt eine ganzrationale Funktion ihr Vorzeichen nicht. Mit Hilfe der Nullstellen lässt sich also ein Überblick gewinnen, in welchen Bereichen die Funktionswerte positiv, negativ oder gleich 0 sind.

Beispiel:

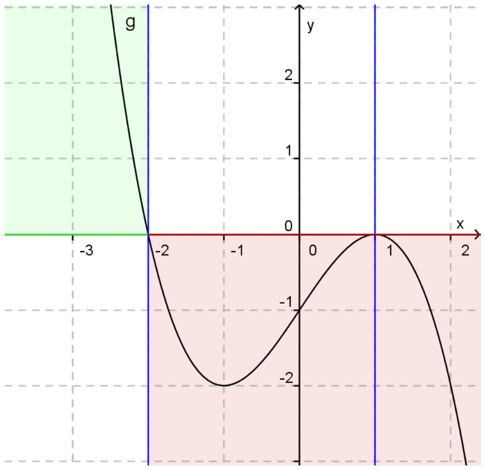
a) $f(x)=(x+1)^2(x-1)^3$
Die Funktion besitzt eine doppelte Nullstelle in $x_1=-1$ und eine dreifache Nullstelle in $x_2=1$.

x	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<1$	$x=1$	$1<x$
$(x+1)^2$	>0	$=0$	>0	>0	>0
$(x-1)^3$	<0	<0	<0	$=0$	>0
f(x)	<0	$=0$	<0	$=0$	>0



b) $g(x)=-0{,}5\cdot(x+2)(x-1)^2$
Die Funktion besitzt eine einfache Nullstelle in $x_1=-2$ und eine doppelte Nullstelle in $x_2=1$.

x	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<1$	$x=1$	$1<x$
$-0{,}5$	<0	<0	<0	<0	<0
$(x+2)$	<0	$=0$	>0	>0	>0
$(x-1)^2$	>0	>0	>0	$=0$	>0
$f(x)$	>0	$=0$	<0	$=0$	<0



3. **Polynomdivision**
Die Polynomdivision ist ein mögliches Verfahren zur Bestimmung des Restpolynoms bei der Nullstellenbestimmung.

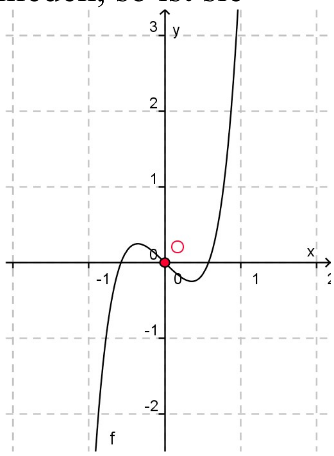
$$
\begin{array}{l}
(4x^3+6x^2-6x-4):(x+0{,}5)=4x^2+4x-8 \\
\underline{-(4x^3+2x^2)} \\
\qquad 4x^2-6x \\
\qquad \underline{-(4x^2+2x)} \\
\qquad\qquad -8x-4 \\
\qquad\qquad \underline{-(-8x-4)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

4. **Symmetrien**

Für die ganzrationale Funktion $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$ gilt:

a) Sind nur Koeffizienten a_i mit **i ungerade** von 0 verschieden, so ist sie **punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems O(0|0)**.

b) Sind nur Koeffizienten a_i mit **i gerade** von 0 verschieden, so ist sie achsen**symmetrisch zur y-Achse**.

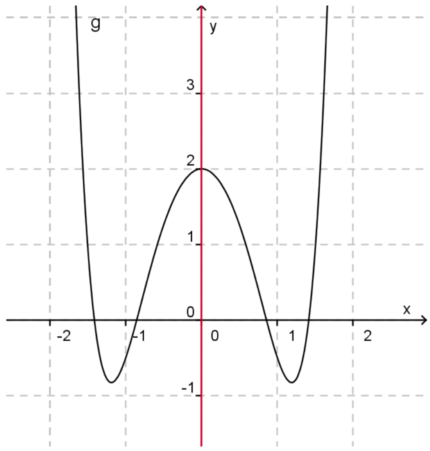


Beispiel:

a) $f(x) = 3x^5 + 2x^3 - x$ ist punktsymmetrisch zu O(0|0).

Begründung:

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x)^5 + 2(-x)^3 - (-x) \\ &= -3x^5 - 2x^3 + x \\ &= -(3x^5 + 2x^3 - x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$



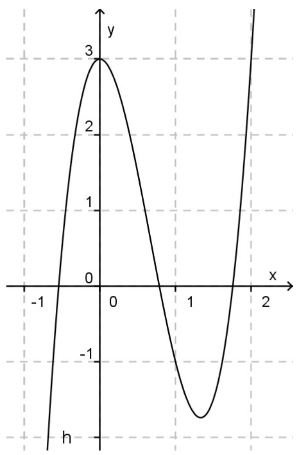
b) $g(x) = 0{,}5x^6 - 3x^2 + 2$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Begründung:

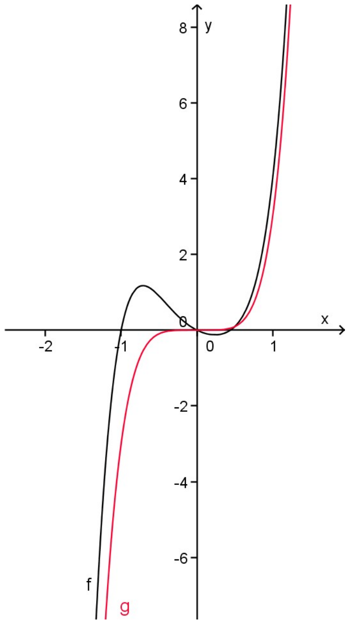
$$\begin{aligned} g(-x) &= 0{,}5(-x)^6 - 3(-x)^2 + 2 \\ &= 0{,}5x^6 - 3x^2 + 2 \\ &= g(x) \end{aligned}$$

c) $h(x) = 4x^3 - 8x^2 + 3$ ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zu O(0|0).

$$\begin{aligned} h(-x) &= 4(-x)^3 - 8(-x)^2 + 3 \\ &= -4x^3 - 8x^2 + 3 \end{aligned}$$



5. Verhalten am Rande des Definitionsbereichs



Eine ganzrationalen Funktion n-ten Grads nähert sich für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ immer mehr der Funktion $g(x) = a_n x^n$ an.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3x^5 + 2x^3 - x \\
&= 3x^5 \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3x^4}\right)}_{\approx 1 \text{ für } x \to \pm\infty} \\
&\to 3x^5 \text{ für } x \to \pm\infty
\end{aligned}
$$

5 Überblick über die Funktionen

1. Hierarchie der Funktionen

- reelle Funktionen
  - rationale Funktionen
    - ganzrationale Funktionen (vgl. 4)
    - gebrochenrationale Funktionen (vgl. Klasse 8, 2.6)
  - nichtrationale Funktionen
    - trigonometrische Funktionen (vgl. 2.2)
    - Exponentialfunktionen (vgl. 3.3)
    - Wurzelfunktionen (vgl. Klasse 9, 1.2), Logarithmusfunktionen (vgl. 3.4)

2. Verhalten im Unendlichen

Kommen die Funktionswerte $f(x)$ für beliebig große x-Werte einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ beliebig nahe, so nennt man a einen **Grenzwert der Funktion f für x gegen plus unendlich**:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$$

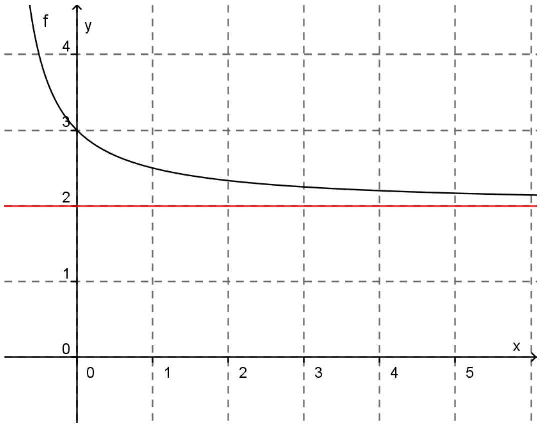
Die Funktion **konvergiert** dann für $x \to +\infty$ **gegen a**. Die Gerade $y = a$ ist eine waagerechte Asymptote von G_f.

Entsprechendes gilt für $x \to -\infty$.

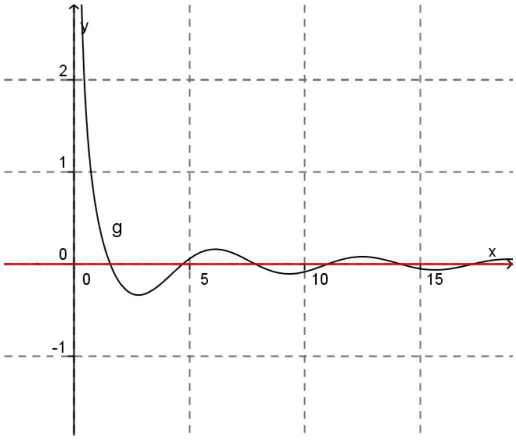
Funktionen, die nicht in dieser Weise gegen eine Zahl a konvergieren, nennt man **divergent**.

Beispiele:

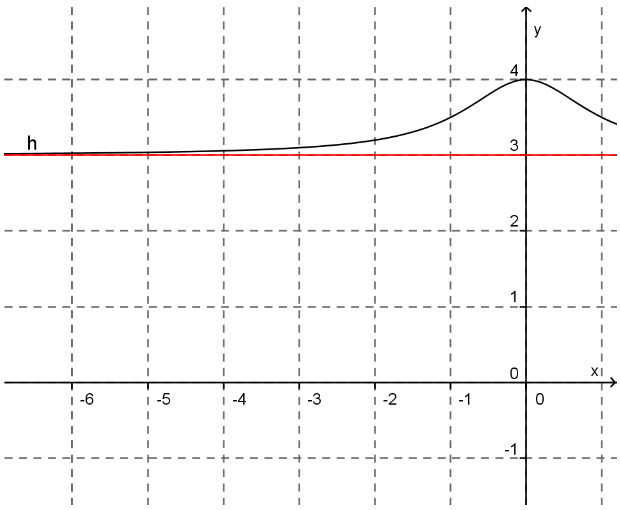
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} + 2 = 2$



b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$



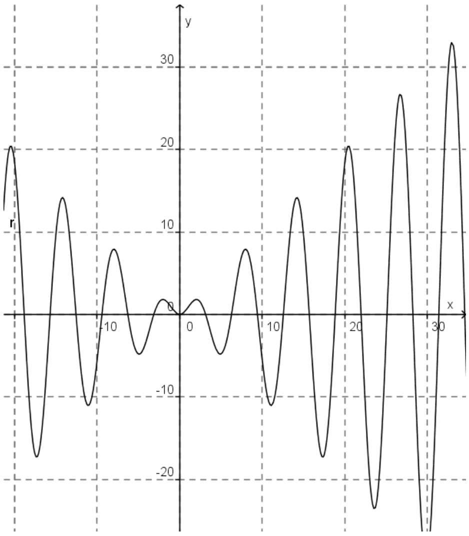
c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2+1} + 3 = 3$



d) Alle ganzrationalen Funktionen n-ten Grads ($n>0$) sind divergent. (vgl. 4.5)

e) Die trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ schwanken periodisch zwischen $[-1;1]$ und sind damit divergent.

f) Die Funktion $r(x) = x \cdot \sin(x)$ ist divergent.



Es gelten die folgenden **Grenzwertregeln**:

Die Funktionen f und g sind konvergent für $x \to +\infty$, mit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a_1$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = a_2$. Dann gilt:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \pm \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = a_1 \pm a_2$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = a_1 \cdot a_2$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)}{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)} = \dfrac{a_1}{a_2}$ sofern $g(x) \neq 0$ und $a_2 \neq 0$ ist.

Entsprechendes gilt für $x \to -\infty$.

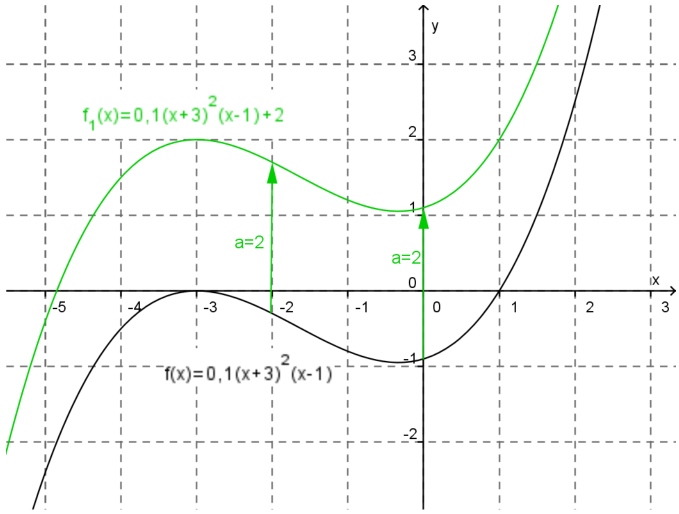
3. Einfluss von Parametern auf den Funktionsgraphen

a) Verschieben des Funktionsgraphen

- $f_1: \; f_1(x) = f(x) + a$ mit $D_{f_1} = D_f$

  Der Parameter a bewirkt eine Verschiebung des Funktionsgraphen **längs der y-Achse**

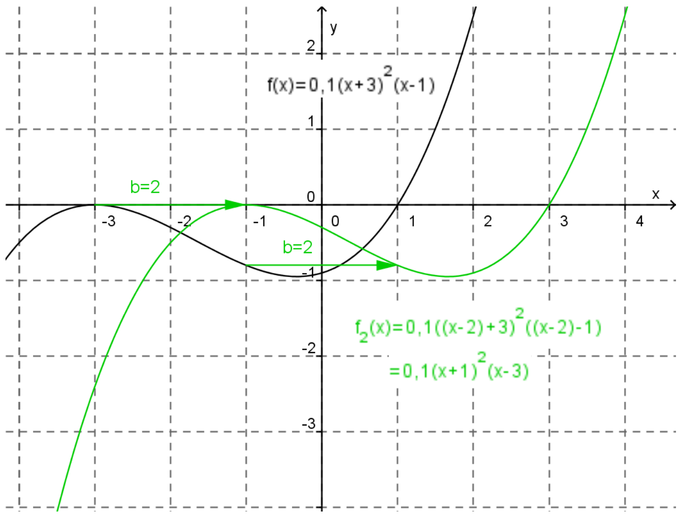
  - $a > 0$: nach oben
  - $a < 0$: nach unten



- $f_2: \; f_2(x) = f(x-b)$

  Der Parameter b bewirkt eine Verschiebung des Funktionsgraphen **längs der x-Achse**

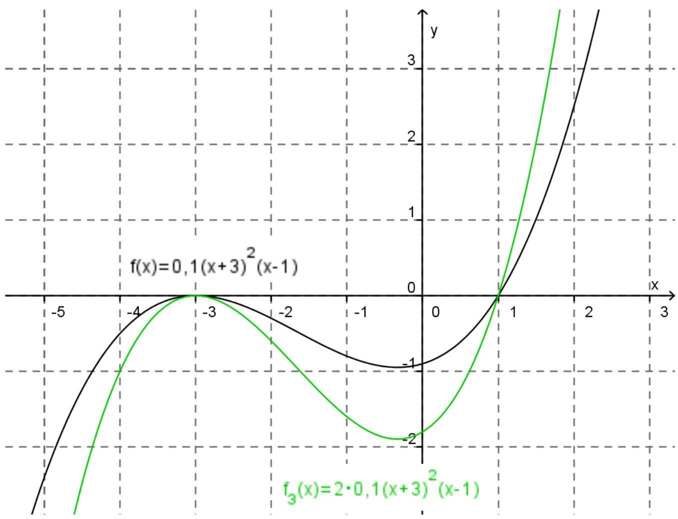
  - $b > 0$: Verschiebung nach rechts
  - $b < 0$: Verschiebung nach links



b) Strecken/Stauchen des Funktionsgraphen

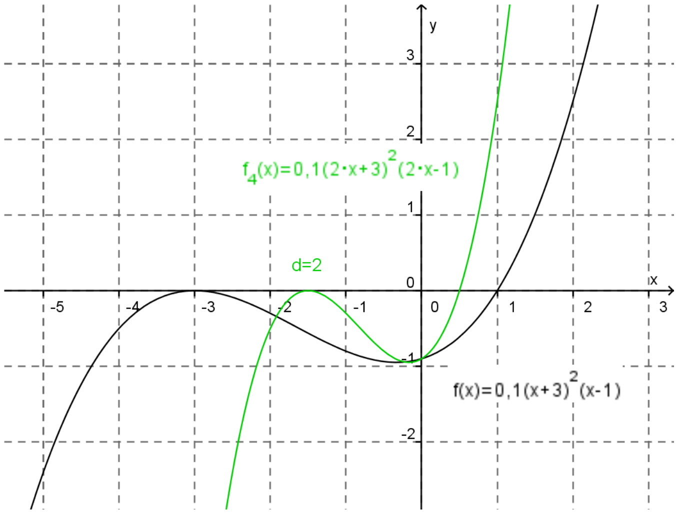
- $f_3: \; f_3(x) = c \cdot f(x)$ mit $c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und $D_{f_3} = D_f$.

  Der Parameter c bewirkt eine Strecken $(c > 1)$ bzw. Stauchen $(0 < c < 1)$ des Funktionsgraphen in **Richtung y-Achse**



- $f_4: \; f_4(x) = f(d \cdot x)$ mit $d \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und $D_{f_4} = D_f$

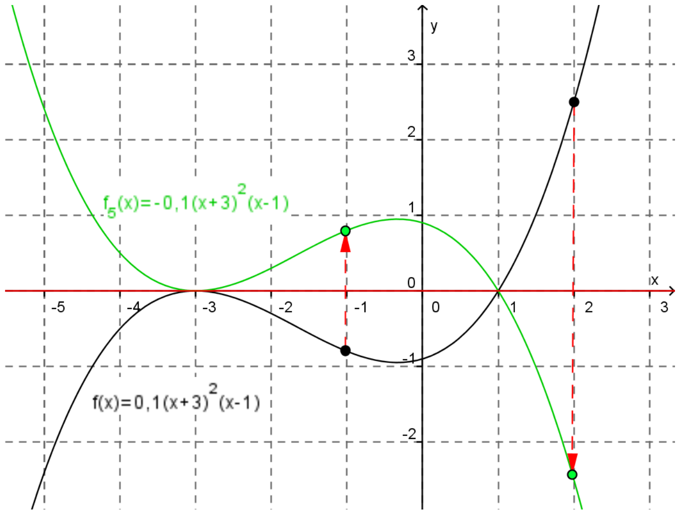
  Der Parameter d bewirkt ein Strecken $(0<d<1)$ bzw. Stauchen $(1<d)$ des Funktionsgraphen in **Richtung x-Achse** um den Faktor $\frac{1}{d}$.



c) Spiegeln des Funktionsgraphen

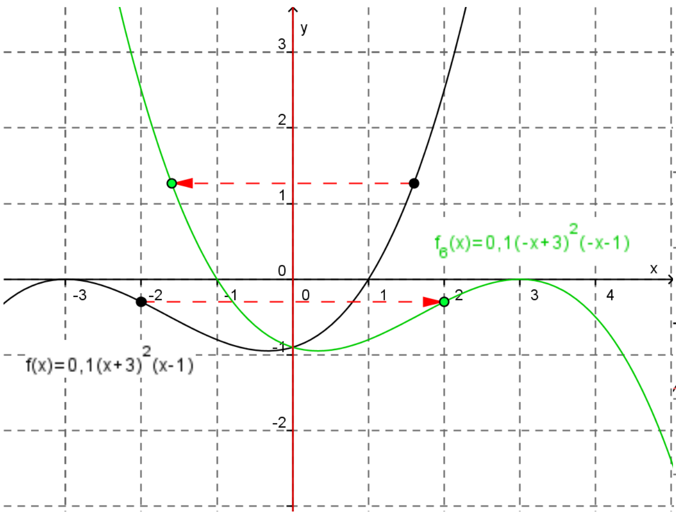
- an der **x-Achse**:

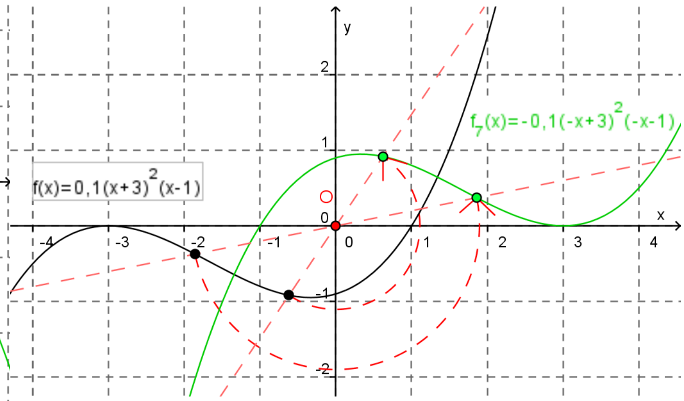
  $f_5: \; f_5(x) = -f(x)$ mit $D_{f_5} = D_f$



- an der **y-Achse**:
  $f_6: \; f_6(x) = f(-x)$

- am **Ursprung**:
  $f_7: \; f_7(x) = -f(-x)$





6 Stochastik

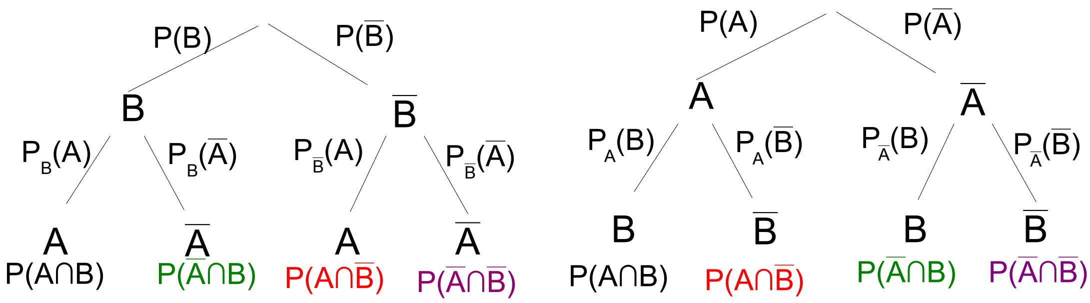
(vgl. Klasse 8, 7; Klasse 9, 6)

1. **Bedingte Wahrscheinlichkeit**

   Bei mehrstufigen Zufallsexperimenten nennt man $P_B(A)$ **die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B**, d.h. also die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ergebnisses A unter der Voraussetzung, dass B eingetreten ist. Sie heißt bedingte Wahrscheinlichkeit.

   Wegen der Pfadregeln gilt: $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

2. **Baumdiagramm und Vierfeldertafel**
   Im Baumdiagramm stehen an den Kanten teilweise bedingte Wahrscheinlichkeiten:



In der Vierfeldertafel stehen nur die Wahrscheinlichkeiten der Schnittmengen: Die bedingten Wahrscheinlichkeiten müssen aus der Tafel berechnet werden.

	A	$\overline{A}$	
B	$P(A\cap B)$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A\cap \overline{B})$	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
	$P(A)$	$P(\overline{A})$	$P(\Omega)$

(Bei der Vierfeldertafel ergibt die Summe der grauen Felder einer Zeile das weiße Feld der Zeile, entsprechendes gilt für die Spalten. Das rechte untere Feld ist die Summe der Felder der dazugehörigen Zeile bzw. Spalte.)

3. Beispiele

a) **Drogenfahndung**

An einer Grenze werden in 5% der Fahrzeuge Drogen geschmuggelt. Ein Drogenspürhund bellt mit 85% Wahrscheinlichkeit, wenn das Fahrzeug Drogen enthält. Bei 20% der Nichtdrogenfahrzeugen bellt er trotzdem. Folgende Fragen gilt es zu beantworten:

(i) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass der Hund bellt und das Fahrzeug Drogen enthält!

(ii) Bei wie viel Prozent der Fahrzeuge bellt der Hund?

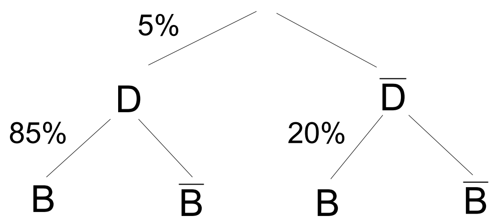
(iii) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass der Hund sich richtig verhält!

(iv) Der Hund bellt bei einem Fahrzeug. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es ein Drogenfahrzeug ist?

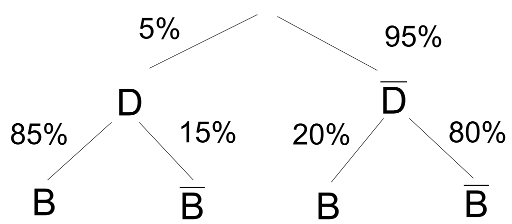
D: „Drogenfahrzeug“
B: „Hund bellt“
Der Beschreibung sind folgende Wahrscheinlichkeiten zu entnehmen:

$$P(D) = 5\%, \quad P_D(B) = 85\%, \quad P_{\overline{D}}(B) = 20\%,$$

im Baumdiagramm dargestellt:



Die Pfadregeln ermöglichen eine Ergänzung des Baums:



(i) Außerdem lassen sich die Wahrscheinlichkeiten der Schnittmengen bestimmen:
Die Wahrscheinlichkeit, dass das Fahrzeug Drogen enthält und der Hund bellt:

$$P(D \cap B) = P(D) \cdot P_D(B) = 0{,}05 \cdot 0{,}85 = 0{,}0425 = 4{,}25\%$$

(ii) Gleiches gilt für die anderen Wahrscheinlichkeiten der Schnittmengen:

$$P(D \cap \overline{B}) = P(D) \cdot P_D(\overline{B}) = 0{,}05 \cdot 0{,}15 = 0{,}0075 = 0{,}75\%$$

$$P(\overline{D} \cap B) = P(\overline{D}) \cdot P_{\overline{D}}(B) = 0{,}95 \cdot 0{,}2 = 0{,}19 = 19\%$$

$$P(\overline{D} \cap \overline{B}) = P(\overline{D}) \cdot P_{\overline{D}}(\overline{B}) = 0{,}95 \cdot 0{,}8 = 0{,}76 = 76\%$$

Aus der Zusammenfassung ergibt sich für:

$$P(B) = P(D \cap B) + P(\overline{D} \cap B) = 0{,}0425 + 0{,}19 = 0{,}2325 = 23{,}25\%$$

Der Hund bellt also bei 23,24% der Fahrzeuge.

(iii) Wie oft reagiert der Hund nun richtig?

$$P(B \cap D) + P(\overline{B} \cap \overline{D}) = 4{,}25\% + 76\% = 80{,}25\%$$

Dies gilt also für 80,25% der Fälle, in 19,75% aber irrt er sich.

(iv) Die Vierfeldertafel gibt einen Überblick:
Die anderen bedingten Wahrscheinlichkeiten ergeben sich aus der Formel 6.1:
Für iv gilt:

	D	$\overline{D}$	
B	4,25%	19%	23,25%
$\overline{B}$	0,75%	76%	76,75%
	5%	95%	100%

$$P_B(D) = \frac{P(B \cap D)}{P(B)} = \frac{0{,}0425}{0{,}2325} \approx 0{,}1828 = 18{,}28\%$$

Wenn der Hund ein Auto durch Bellen angezeigt hat, ist die Wahrscheinlichkeit, dass es Drogen enthält mit 18,28% immer noch unter 20%!

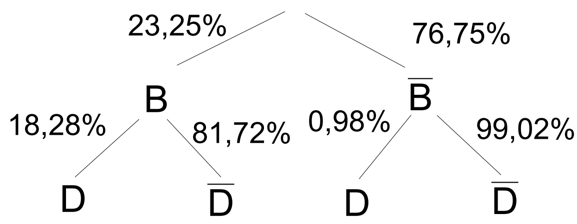
Die weiteren bedingten Wahrscheinlichkeiten lauten:

$$P_B(\overline{D}) = \frac{P(B \cap \overline{D})}{P(B)} = \frac{0{,}19}{0{,}2325} \approx 0{,}8172 = 81{,}72\%$$

$$P_{\overline{B}}(D) = \frac{P(\overline{B} \cap D)}{P(\overline{B})} = \frac{0{,}0075}{0{,}7675} \approx 0{,}0098 = 0{,}98\%$$

$$P_{\overline{B}}(\overline{D}) = \frac{P(\overline{B} \cap \overline{D})}{P(\overline{B})} = \frac{0{,}76}{0{,}7675} \approx 0{,}9902 = 99{,}02\%$$

Das dazugehörige Baumdiagramm sieht folgendermaßen aus:



b) Würfeln

Wie häufig muss man mit einem Laplace-Würfel würfeln, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens einmal die Sechs zu würfeln?

Die Wahrscheinlichkeit, in „n Würfen mindestens eine Sechs“ zu werfen, beträgt:

$$\begin{aligned} P(\text{„mindestens eine Sechs in n Würfen“}) &= 1 - P(\text{„keine Sechs in n Würfen“}) \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$
\begin{aligned}
P(\text{„mindestens eine Sechs in n Würfen"}) &\geq 95\,\% \\
1-\left(\frac{5}{6}\right)^n &\geq 0{,}95 && \left|\ +\left(\frac{5}{6}\right)^n - 0{,}95\right. \\
0{,}05 &\geq \left(\frac{5}{6}\right)^n && \mid \text{Logarithmieren} \\
\log(0{,}05) &\geq \log\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) \\
\log(0{,}05) &\geq n\cdot\log\left(\frac{5}{6}\right) && \left|:\underbrace{\log\left(\frac{5}{6}\right)}_{<0}\right. \\
\frac{\log(0{,}05)}{\log\left(\frac{5}{6}\right)} &\leq n \\
16{,}43 &\leq n
\end{aligned}
$$

Man muss also dafür 17 Mal würfeln.