Binomialverteilung

Mittwoch, 15. September 2021 12:32

1. Die Binomalverteilung

Bernoulli-Ketten

Definition: Ein bernoulli-experiment hat genau zwei Ergebnisse. Eine bernoulli-Kette besteht aus mehreren unabhängigen Bernoulli-experimenten. Die Anzahl der Durchführungen nennt man die Länge n und die Wahrscheinlichkeit eines Treffers p

Binomialkoeffizienten

Wenn aus 10 Ojekten genau 2 ausgewählten werden sollen kann die Anzahl der Möglichkeiten mit dem sogenannten Binomialkoeffizienten berechnet werden

Definition: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ heißt Binomialkoeffizient (für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$)

Satz:

- Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten aus n Objekten k auszuwählen (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge)
- Beim Baumdiagramm zu einer Bernoulli-Kette der Länge n gibt es $\binom{n}{k}$ Pfade mit genau k treffern

Beispiel:

a) Berechnen sie $\binom{4}{2}$ durch die Angabe der 4-Tupel mit zwei 1en

b) Berechnen sie $\binom{8}{5}$ mithilfe einer der Formeln ohne WTR

c) Berechnen sie $\binom{20}{13}$ mit dem WTR

Lösung:

a) Folgende 4-Tupel mit 2 1en: (1;1;0;0), (1;0;1;0), (1;0;0;1), (0;1;1;0), (0;1;0;1), (0;0;1

b) $\binom{8}{5} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2} = 8\cdot7 = 56$

c) $\binom{20}{13} = 77520$

WTR:

1. Zahl $\boxed{2x\ nCr\ Taste}$ 2. Zahl

Die Formel von Bernoulli

Satz: Gegeben ist eine Bernoulli-Kette der Länge n und der Trefferwahrscheinlichkeit p. Wenn die Zufallsgröße X die Anzahl der Treffer zählt, dann ist die Wahrscheinlichkeit für genau k treffer

$$P(X=k) = \binom{n}{k}\cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Beispiel

k = 11 n = 25

$P(X=11) = \binom{25}{11}\cdot 0{,}5^{11}\cdot 0{,}5^{14} = 0{,}13$ / 13%

A: Die Wahrscheinlichkeit dass man genau 11 mal z.b. eine Münze ist 13%

Binomialverteilung

Definition: Die Wahrscheinlichkeit $P(X=k)$ für die Trefferanzahl k einer Bernoulli-Kette der Länge n nennt man $B_{n,p}(k)$ (für $k = 0, 1, \dots, n$). Dabei ist p die Trefferwahrscheinlichkeit. Die Funktion, die jeder Trefferanzahl k die Wahrscheinlichkeit $B_{n,p}(k)$, nennt man Binomialverteilung mit den Parametern n und p. Man sagt: Die Zufallsgröße X ist $B_{n,p}(k)$-verteilt.

Erwartungswert bei binomialverteilung

$E(X) = n \cdot p$

Wahrscheinlichkeiten mit dem WTR

$n = 10$
$p = 0{,}4$

$P(X=2)$: $\boxed{2nd}$ $\boxed{data}$ $\boxed{\blacktriangleright}$

4x $\boxed{\downarrow}$ $\boxed{Enter}$

single
$\boxed{Enter}$ → n, p u. x eingeben

Erwartungswert

Mathematik | Binomialverteilung | Klasse 10

Der Erwartungswert

Satz: Eine $B_{n;p}$-verteilte Zufallsgröße hat den Erwartungswert $E(X) = \mu = n \cdot p$.

Bei einer großen Anzahl von Durchführungen einer Bernoulli-Kette der Länge n und Trefferwahrscheinlichkeit p kann man durchschnittlich $n \cdot p$ Treffer erwarten.

Beispiel:

Ein Bogenschütze gibt wiederholt eine Serie von fünf Schüssen auf eine Scheibe ab. Er trifft bei jedem Schuss mit der Wahrscheinlichkeit 70 % ins Gelbe.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert für eine Serie und interpretieren Sie das Ergebnis.
b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung an und zeichnen Sie das Histogramm.

Lösung:

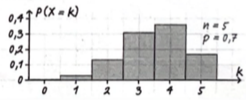
Die Zufallsgröße X, die die Anzahl der Treffer zählt, ist $B_{5;0,70}$-verteilt.

a) Der Erwartungswert beträgt $\mu = 5 \cdot 0{,}70 = 3{,}5$.
Der Schütze kann auf lange Sicht im Durchschnitt pro Serie mit 3,5 Treffern rechnen.

b) Wahrscheinlichkeitsverteilung:

k	0	1	2
$B_{5;0,7}(k)$	≈ 0,0024	≈ 0,0284	0,1323
k	3	4	5
$B_{5;0,7}(k)$	0,3087	≈ 0,3602	≈ 0,1681

Histogramm:



5. Kumulierte Wahrscheinlichkeiten

Definition: Die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq k) = P(X = 0) + \dots + P(X = k)$ heißt kumulierte Wahrscheinlichkeit.

WTR

1) „höchstens k Treffer": $P(X \leq k)$
2) „weniger als k Treffer": $P(X < k) =$ $P(X \leq k-1)$
3) „mindestens k Treffer": $P(X \geq k) =$ $1 - P(X \leq k-1)$
4) „mehr als k Treffer": $P(X > k) =$ $1 - P(X \leq k)$
5) „mindestens k und höchstens l Treffer": $P(k \leq X \leq l) =$ $P(X \leq l) - (X \leq k-1)$

Beispiel: Bei einer verbeulten Münze fällt Zahl mit der Wahrscheinlichkeit p = 0,6. Wie Wahrscheinlichkeit ist es, dass bei 10 Würfen

a) mindestens 5x Zahl fällt?
b) weniger als 7x Zahl fällt

Lösung: Die Zufallsgröße X zählt, wie oft „Zahl" fällt. „X" ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 10$ und $p = 0{,}6$

a) $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - 0{,}166 = 0{,}834$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 5x Zahl fällt, beträgt 83,4%.

Problemlösen mit der Binomialverteilung

Beispiel

Wie oft muss man mit einem idealen Tetraeder mindestens würfeln, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens dreimal eine 4 zu würfeln

Lösung:

Lösung:

Die Zufallsgröße X zählt die Vierer und ist binomialverteilt mit $k=3$ und $p=0{,}25$

ges: n, sodass

$P(X \geq 3) \geq 0{,}95$

$1 - P(X \leq 2) \geq 0{,}95 \quad | + P(X \leq 2)$

$1 \geq 0{,}95 + P(X \leq 2) \quad | - 0{,}95$

$0{,}05 \geq P(X \leq 2)$

n	$P(X \leq 2)$
5	0,001
23	0,049
24	0,03

Variante	gesucht	Beispiel
I	$P(X \leq k)$	Ein idealer Würfel wird achtmal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, höchstens drei Sechsen zu würfeln? Gegeben: $n = 8$, $p = \frac{1}{6}$, $k = 3$. Gesucht: $P(X \leq 3)$.
II	n	Man möchte mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens eine Sechs würfeln. Wie oft muss man mindestens würfeln? Gegeben: $p = \frac{1}{6}$, $k = 1$, $P(X \geq 1) \geq 0{,}9$. Gesucht: n.
III	p	Bei einem gezinkten Würfel sollen bei zehnmaligem Werfen mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % mindestens zwei Sechsen geworfen werden. Wie groß muss die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs bei diesem Würfel mindestens sein? Gegeben: $n = 10$, $k = 2$, $P(X \geq 2) = 0{,}8$. Gesucht: p.
IV	k	Man wirft einen idealen Würfel 50-mal. Wenn man mehr als k Sechsen würfelt, erhält man einen Gewinn. Wie groß muss k mindestens sein, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5 % einen Gewinn erhält? Gegeben: $n = 50$, $p = \frac{1}{6}$, $P(X \leq k) \leq 0{,}05$. Gesucht: k.